ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತಗಳಲ್ಲಿ ಅಸಮತೆಗಳು

ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿ

ಅಸಮತೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಲೇಖನಗಳ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಇದು ಮೊದಲ ಲೇಖನ. ಬೀಜಗಣಿತ, ರೇಖಾಗಣಿತ, ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಕುತೂಹಲಕಾರಿಯಾದ ಅಸಮತೆಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳನ್ನು ಸರಳ ಹಾಗೂ ಹೇಳಿಕೊಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೊಟ್ಟಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ ಎದುರುಗೊಂಡಾಗ, ಅಸಮತೆಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಗಲಿಬಿಲಿಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ. ಪ್ರಾಯಶಃ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಸಮತೆಗಳು ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಸಂಬಂಧಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮಾತ್ರವೇ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವುದರಿಂದ ಹೀಗೆ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ದಿಢೀರನೆ ಅವರು ಅಂದಾಜು ಮತ್ತು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಬಂಧಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಅನನ್ಯವೂ, ಸಮಂಜಸವೂ ಆದ ಉತ್ತರ ಇನ್ನು ಲಭ್ಯವಿಲ್ಲ! ವಿದ್ಯಾಥಿಗಳಲ್ಲಿ ತಳಮಳ ಉಂಟುಮಾಡಲು ಇದೊಂದು ಕಾರಣವೇ ಸಾಕು!

ಆಗಾಗ್ಗೆ, ಅಸಮತೆಗಳ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ, ನಮ್ಮ ಅಂತರ್ಬೋಧೆಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾದ ಅಂತರಾರ್ಥಗಳನ್ನೂ ಕಾಣುವುದಲ್ಲದೆ, ಕೆಲವು ವಿರೋಧಾಭಾಸಗಳನ್ನೂ ಕೂಡ ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಇವನ್ನು ಬೋನಸ್‌ಗಳೆಂದು ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

ಪೂರ್ವಸಿದ್ಧತೆಗಳು: ಅಸಮತೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಗತಿಗಳು

1. a ಮತ್ತು b ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ್ದಲ್ಲಿ, ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ:

$$a < b; \quad a = b; \quad \text{ಮತ್ತು} \quad b < a.$$

ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಪ್ರಕಟಪಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ: *ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾದ* $\mathbb{R}$ ***ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಕ್ರಮವಾಗಿದೆ.***

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾದ $\mathbb{C}$ ಬಗ್ಗೆ ಹೀಗೆ ಹೇಳಲಾಗದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 1 ಮತ್ತು i ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಯಾವುದೇ ಕ್ರಮವನ್ನೂ ಹುಡುಕಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮನದಲ್ಲಿ ಬಹಳವೇ ಗೊಂದಲ ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. *ನಾವು* $1 < i$ *ಅಥವಾ* $i < 1$ *ಎಂದು ಏಕೆ ಘೋಷಿಸಬಾರದು?* ನಾವು ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದರೆ ಏನು ಪ್ರಮಾದವಾಗುತ್ತದೆ? ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮನದಲ್ಲಿ ಬಹಳವೇ ಗೊಂದಲ ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಇವು ಸುಲಭದ ವಿಚಾರಗಳಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಮುಖ್ಯಪದಗಳು: ಅಸಮತೆಗಳು, ಧನಾತ್ಮಕ, ಋಣಾತ್ಮಕ, ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣ

2. x ಮತ್ತು y ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸತ್ಯ:

$$x > 0 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad y > 0 \quad \Rightarrow \quad x + y > 0$$

$$x < 0 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad y < 0 \quad \Rightarrow \quad x + y < 0$$

ಹಾಗೂ:

$$x > 0 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad y > 0 \quad \Rightarrow \quad xy > 0,$$
$$x > 0 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad y < 0 \quad \Rightarrow \quad xy < 0,$$
$$x < 0 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad y < 0 \quad \Rightarrow \quad xy > 0.$$

3. x, y ಮತ್ತು k ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸತ್ಯ:

$$x < y \quad \text{ಮತ್ತು} \quad k > 0 \quad \Rightarrow \quad kx < ky,$$

$$x < y \quad \text{ಮತ್ತು} \quad k < 0 \quad \Rightarrow \quad kx > ky.$$

ಅಂತೆಯೇ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗಿನ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವ ನಿಯಮಗಳು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿವೆ:

$$0 < x < y \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x},$$

$$x < y < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0.$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $0 < 3 < 5$ ಮತ್ತು $0 < 1/5 < 1/3$; ಹಾಗೂ $-5 < -3 <$ ಮತ್ತು $-1/3 < -1/5 < 0$.

4. ಕಡೆಯದಾಗಿ, ಅಸಮತೆಯ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ಪ್ರವಹನಶೀಲತೆಯ ಗುಣವಿರುವುದನ್ನು (ಟ್ರಾನ್ಸಿಟಿವಿಟಿ ಪ್ರಾಪರ್ಟಿ) ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ a, b, c ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $a < b$ ಮತ್ತು $b < c$, ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $a < c$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಬರಿ ಕಣ್ಣಿಗೆ ನೀರಸವಾಗಿ ಕಾಣುವ, ಈ ಪ್ರವಹನಶೀಲತೆಯ ಗುಣವು ಅನೇಕ ಬಾರಿ ತನ್ನ ಅಸ್ತಿತ್ವದ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಅದು ಸಂಭವಿಸುವ ಕ್ರಮ ಹೀಗಿದೆ. a ಮತ್ತು b ಎಂಬ ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳಿಗೆ, $a < b$ ಅಸಮತೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕು ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆದರೆ ಇದರಲ್ಲಿರುವ ನಿರೂಪಣೆಗಳಿಂದ, ಈ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರೆಯುವುದು ಕಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಳಸುವ ತಂತ್ರವೆಂದರೆ,

$$a < c \quad \text{ಮತ್ತು} \quad c < b$$

ಎರಡೂ ಅಸಮತೆಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವಂತೆ ಮತ್ತು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಧಿಸುವಂತೆ ಮೂರನೆಯ ಪರಿಮಾಣ c ಅನ್ನು ಹುಡುಕುವುದು. ಅಥವಾ,

$$a < c, \quad c < d, \quad d < b$$

ಅಸಮತೆಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವಂತೆ ಮತ್ತು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಧಿಸುವಂತೆ c ಮತ್ತು d ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಬಹುದು. ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ದಾಟಿದ ನಂತರ, ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಅಸಮತೆಯು ಸುಲಭವಾಗಿ ಬರುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸವಾಲೆಂದರೆ c ಮತ್ತು dಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವುದು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ವ್ಯವಕಲನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಯಾವುದೇ ನಿಯಮವನ್ನು ರಚಿಸಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣವೂ ಸತ್ಯವೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತಾರೆ: $a < b$ ಮತ್ತು $c < d$, ಆಗಿದ್ದರೆ $(a - c) < (b - d)$ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು (ಅಥವಾ ಇದರ ಅನ್ಯ ಸ್ವರೂಪ). ಆದರೆ ಈ ಹೇಳಿಕೆ ತಪ್ಪು ಎನ್ನಲು ಹೇರಳವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಸುಲಭವಾಗಿ ದೊರಕುತ್ತವೆ. (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಈ ಆಸಕ್ತಿಕರ ಚಟುವಟಿಕೆಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿರಿ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ವಿರೋಧವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀವೇ ನೀಡಿರಿ ಎಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಹೇಳಿ). ಇದೋ ಇಲ್ಲೊಂದು ಆ ರೀತಿಯ ಉದಾಹರಣೆ: $7 < 8$ ಮತ್ತು $3 < 5$; ಆದರೆ $(7 - 3)$ ಯು $(8 - 5)$ ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಲ್ಲ. ಅಂತೆಯೇ, ಭಾಗಾಕಾರದ ಬಗ್ಗೆಯೂ ಸಹ ಯಾವುದೇ ನಿಯಮಗಳಿಲ್ಲ.

ಆದರೆ, ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಗುಣವು ಸತ್ಯ ಹಾಗೂ ಆಗಾಗ್ಗೆ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ: $a < b$ ಮತ್ತು $c < d$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(a - d) < (b - c)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ವಾಸ್ತವಾಂಶಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಇದನ್ನು ನೀವೇ ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂದು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡಿ.

ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಮತ್ತು ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಪ್ರಮೇಯ 1 ಅಸಮತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಮೂಲಭೂತ ವಿಚಾರವಾಗಿದ್ದು, ಇದು ಇಡೀ ಅಸಮತೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ತಳಹದಿಯಾಗಿದೆ ಎನ್ನಬಹುದು! ಮುಂದಿನ ಪುಟಗಳಲ್ಲಿ ಇದರ ಪರಿಚಯವು ಮತ್ತೆ ಮತ್ತೆ ಆಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರಮುಖವಾದ ಮತ್ತೆರಡು ಫಲಿತಗಳೆಂದರೆ ಪ್ರಮೇಯ 2 ಮತ್ತು 3.

ಪ್ರಮೇಯ 1 : *(ಅಸಮತೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮೂಲಭೂತ ಸಂಗತಿ) ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಅ-ಋಣಾತ್ಮಕ (ಧನಾತ್ಮಕ) ವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, x ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $x^2 \geq 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ; ಈ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ $x = 0$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಮತೆಯು ನಿಜವಾಗುತ್ತದೆ.*

ಪ್ರಮೇಯ 2 : *a ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ*

- *$a > 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $a < a^2 < a^3 < a^4 < \cdots$*
- *$a < 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $a > a^2 > a^3 > a^4 > \cdots$*

ಪ್ರಮೇಯ 3 : *a ಮತ್ತು $a < b$ ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $a < b$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ:*

$$a^2 < b^2, \quad a^3 < b^3, \quad a^4 < b^4, \quad a^5 < b^5, \quad \ldots$$

ಹಾಗೂ

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2}, \quad \frac{1}{a^3} > \frac{1}{b^3}, \quad \frac{1}{a^4} > \frac{1}{b^4}, \quad \ldots$$

ಮೇಲೆ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಪ್ರಮೇಯ 2 ಮತ್ತು 3 ಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ನಿಮಗೇ ಬಿಡುತ್ತಿದ್ದೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2 ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಹೇಳಿಕೆಯೂ ಸಮ್ಮತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 4 : *a ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ:*

1. *$a > 1$ ಆದಾಗ, ಸರಣಿ $1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ ಅನಂತತೆಯತ್ತ ಅಪಸರಿಸುತ್ತದೆ.*
2. *$a < 1$ ಆದಾಗ, ಸರಣಿ $1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ 0ಯತ್ತ ಅಭಿಸರಿಸುತ್ತದೆ.*

ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ, ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಬಳಸುವ ಸಂದರ್ಭ ಇನ್ನೂ ಒದಗಿ ಬಂದಿಲ್ಲ.

ಚೌಕದ ಐಸೋಪೆರಿಮೆಟ್ರಿಕ್ ಗುಣ

ಪ್ರಸಕ್ತ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸುವ ಕ್ರಮದ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ, ರೇಖಾಗಣಿತದ ಸ್ವಾದವಿರುವ ಬಹಳವೇ ಪರಿಚಿತವಾದ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಮಾಡೋಣ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ, ಈ ಕೆಳಕಂಡುದನ್ನು ನಾವು ಪ್ರಮಾಣೀಕರಿಸೋಣ:

ಪ್ರಮೇಯ 5 : *ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಪರಿಧಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎಲ್ಲ ಆಯತಾಕಾರದ ಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ, ಚೌಕವು ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎಲ್ಲ ಆಯತಗಳಲ್ಲಿ ಚೌಕವು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಪರಿಧಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.*

ರುಜುವಾತು: a ಮತ್ತು b ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ, p ಅದರ ಪರಿಧಿ ಇರಲಿ ಮತ್ತು k ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ :

$$p = 2(a + b), \quad k = ab.$$

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{p^2}{4} = a^2 + 2ab + b^2$ ಮತ್ತು ತತ್ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ:

$$\frac{p^2}{4} - 4k = a^2 - 2ab + b^2,$$

ಎಂದರೆ,

$$\frac{p^2}{4} - 4k = (a - b)^2$$

ನಮಗೆ ಅಪೇಕ್ಷಿತವಾದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಕಡೆಯ ಸಾಲಿನಿಂದ ತರ್ಕೈಸಬಹುದು. ಅದು ಈ ರೀತಿ ಇದೆ:

$$4k = \frac{p^2}{4} - (a - b)^2 \leq \frac{p^2}{4},$$

ಮತ್ತು ಈ ಸಮತೆಯು $a = b$ ಆದಾಗಲೂ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, p ಸ್ಥಿರವಾದಾಗ ಮತ್ತು $a = b$ ಆದಾಗ k ತನ್ನ ಗರಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ ಆಕೃತಿಯು ಚೌಕವಾದಾಗ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂತೆಯೇ:

$$\frac{p^2}{4} = 4k + (a - b)^2 \geq 4k$$

ಮತ್ತು ಈ ಸಮತೆಯು $a = b$ ಆದಾಗಲೂ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, k ಸ್ಥಿರವಾದಾಗ ಮತ್ತು $a = b$ ಆದಾಗ p ತನ್ನ ಕನಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ ಆಕೃತಿಯು ಚೌಕವಾದಾಗ ಪರಿಧಿಯು ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ■

ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬ ವಾಸ್ತವ ಅಂಶವನ್ನು ಹೇಗೆ ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

ಈಗ ನಾವು ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಓದುಗರ ಮುಂದೆ ಇಡುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿರುವ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಇದೇ ಲೇಖನದ ಉತ್ತರ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಓದುಗರ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

1. ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು: $2^{1/2}$ ಅಥವಾ 1.5 ?
2. 2ರ ವರ್ಗಮೂಲವು 1.4ಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವೋ ಅಥವಾ 1.5ಕ್ಕೋ? (ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು $\sqrt{2}$ ವಿನ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಅರಿತಿರುವ ಈಗಿನ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಬಳಸದೆ, ಮೂಲ ಗಣಿತ ವಾದಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧರಿಸಿ ನೀಡಿರಿ).
3. 3ರ ವರ್ಗಮೂಲವು 1.7ಕ್ಕೆ ಸನಿಹವೋ ಅಥವಾ 1.75ಕ್ಕೋ ?
4. ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು: $2^{1/2}$ ಅಥವಾ $3^{1/3}$? ($\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $\sqrt[3]{3}$ ಎಂದೂ ಇದನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.)
5. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ದೊಡ್ಡದು ಯಾವುದು:
$\sqrt{1} + \sqrt{19}, \sqrt{2} + \sqrt{18}, \sqrt{3} + \sqrt{17}, \ldots, \sqrt{9} + \sqrt{11}, \sqrt{10} + \sqrt{10}$?

ಪರಿಹಾರಗಳು

1. **ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು:** $2^{1/2}$ **ಅಥವಾ** 1.5 **?**
   ನಾವು ಈ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ: $a, b > 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$. ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2 ಮತ್ತು 2.25 ಹಾಗೂ 2.25 ಸುಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿಯೇ ದೊಡ್ಡ ಪ್ರಮಾಣದ್ದಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $1.5 > \sqrt{2}$.
2. **2ರ ವರ್ಗಮೂಲವು 1.4ಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವೋ ಅಥವಾ 1.5ಕ್ಕೋ ?**
   ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ, ನಂತರ
   $$a = \left|10\sqrt{2} - 14\right|, \quad b = \left|10\sqrt{2} - 15\right|$$
   ಆಗಿದ್ದರೆ ಇವೆರಡರಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು ಯಾವುದು ಎಂದು ಪ್ರಶ್ನಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.
   ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದರೆ:
   $$a^2 = 396 - 280\sqrt{2}; \quad b^2 = 425 - 300\sqrt{2}.$$
   ಆದ್ದರಿಂದ:
   $$b^2 - a^2 = 29 - 20\sqrt{2}.$$
   ಈಗ $(b^2 - a^2)$ ಋಣಾತ್ಮಕವೋ ಅಥವಾ ಧನಾತ್ಮಕವೋ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು.
   $$29^2 = 841, \quad (20\sqrt{2})^2 = 800,$$
   ಮತ್ತು $841 > 800$. ಆದ್ದರಿಂದ $b^2 > a^2$ ಮತ್ತು ಹಾಗಾಗಿ $b > a$. ತತ್ಕಾರಣವಾಗಿ 2ರ ವರ್ಗಮೂಲವು 1.5ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ 1.4ರ ಸಮೀಪವೇ ಇರುತ್ತದೆ.
3. **3ರ ವರ್ಗಮೂಲವು 1.7ಕ್ಕೆ ಸನಿಹವೋ ಅಥವಾ 1.75ಕ್ಕೋ ?** ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ, ನಂತರ
   $$a = \left|20\sqrt{3} - 34\right|, \quad b = \left|20\sqrt{3} - 35\right|$$
   ಆಗಿದ್ದರೆ ಇವೆರಡರಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು ಯಾವುದು ಎಂದು ಪ್ರಶ್ನಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಸಮೀಕರಣವು ಈ ರೂಪ ಪಡೆಯುತ್ತದೆ:
   $$a^2 = 2356 - 1360\sqrt{3}; \quad b^2 = 2425 - 1400\sqrt{3}.$$
   ಆದ್ದರಿಂದ:
   $$b^2 - a^2 = 69 - 40\sqrt{3}.$$
   ಈಗ $b^2 - a^2$ ಋಣಾತ್ಮಕವೋ ಅಥವಾ ಧನಾತ್ಮಕವೋ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು.
   $$692 = 4761, (40\sqrt{3})^2 = 4800,$$
   ಮತ್ತು $4800 > 4761$. ಆದ್ದರಿಂದ $b^2 < a^2$ ಮತ್ತು ಹಾಗಾಗಿ $b < a$. ತತ್ಕಾರಣವಾಗಿ 3 ರ ವರ್ಗಮೂಲವು 1.7ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ 1.75ರ ಸಮೀಪವೇ ಇರುತ್ತದೆ.
4. **ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು :** $2^{1/2}$ **ಅಥವಾ** $3^{1/3}$ **($\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $\sqrt[3]{3}$) ಎಂದೂ ಇದನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.)** $a = 2^{1/2}$ ಮತ್ತು $b = 3^{1/3}$ ಆಗಿರಲಿ. ಎರಡು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (irrational numbers) ಇರುವಾಗ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಘಾತವು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವಾಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದು ಸುಲಭ ಎಂಬುದು ಸುಸ್ಪಷ್ಟ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $2^{1/2} < 3^{1/2}$ ಅಥವಾ $10^{1/3} < 11^{1/3}$ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿರುವ ತೊಂದರೆಯೆಂದರೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಘಾತಗಳು (ಕ್ರಮವಾಗಿ 1/2 ಮತ್ತು 1/3) ಬೇರೆಯವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಸ್ವತಃಸಿದ್ಧವಾದ ಕೆಲಸವನ್ನೇ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ; ಘಾತಗಳು ಒಂದೇ ಆಗುವಂತೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಮಾರ್ಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಮತ್ತು 3ರ ಲ.ಸಾ.ಅ. 6 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, a ಮತ್ತು b ಎರಡನ್ನೂ 6ರ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈಗ :
   $$a^6 = (2^{1/2})^6 = 2^3 = 8$$
   ಮತ್ತು
   $$b^6 = (3^{1/3})^6 = 3^2 = 9.$$
   $8 < 9$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $8^{1/6} < 9^{1/6}$ ಆಗಿಯೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $2^{1/2} < 3^{1/3}$.

5. **ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ದೊಡ್ಡದು ಯಾವುದು** $\sqrt{1}+\sqrt{19}, \sqrt{2}+\sqrt{18}, \sqrt{3}+\sqrt{17}, \dots \sqrt{9}+\sqrt{11}$, $\sqrt{10}+\sqrt{10}$? ಇದಕ್ಕೆ ನಾವು ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಎರಡೂ ಮಾರ್ಗಗಳು ಗಹನ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಯೋಗ್ಯವಾಗಿವೆ.

ಕ್ರಮ 1: ನೀಡಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು $x = 1, 2, 3, \dots 10$ ಇರುವಾಗಿನ $\sqrt{x}+\sqrt{(20-x)}$ ರೂಪದಲ್ಲಿವೆ. ಈ ಪ್ರಮಾಣದ ವರ್ಗವು

$$x + 2\sqrt{x}\sqrt{(20-x)} + (20-x) = 20 + 2\sqrt{x(20-x)}$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ವೇದ್ಯವಾಗುವ ಅಂಶವೆಂದರೆ $\{1, 2, 3, \dots 9, 10\}$ ಗಣದಲ್ಲಿ xನ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಸಾಕು ಹಾಗೂ ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ xನ ಗರಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯವು $x(20-x)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು. ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಎಲ್ಲ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಒಂದು ಕ್ರಮ; ಈ ಮೂಲಕ $x = 10$ ಆದಾಗ $x(20-x)$ ಗರಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ತರ್ಕಬದ್ಧವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಸಾಧಿಸಬಹುದು:

$$x(20-x) = 20x - x^2 = 100 - (x2 - 20x + 100) = 100 - (x-10)2,$$

ಮತ್ತು ಈ ಅಂತಿಮ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ನಾವು ತರ್ಕಿಸಬಹುದಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ

$$x(20-x) \leq 100,$$

ಹಾಗೂ $x = 10$ ಇರುವಾಗ ಇದು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, $x \in \{1, 2, 3, \dots 9, 10\}$ ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{x}+\sqrt{(20-x)}$ ನ ಗರಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯವು $x = 10$ ಆದಾಗ ಇರುತ್ತದೆ. ತತ್ಫಲವಾಗಿ ದತ್ತ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠವಾದ ಪ್ರಮಾಣವೆಂದರೆ $\sqrt{10}+\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$.

ಕ್ರಮ 2: $a \neq b$ ಆಗಿರುವಾಗ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ಸಂಬಂಧದಿಂದ ಹೊರಹೊಮ್ಮಿದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಜಾಣ್ಮೆಯಿಂದ ಬಳಸಿಕೊಂಡರೆ

$$a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. $\sqrt{1}+\sqrt{19}$ ಅನ್ನು $\sqrt{2}+\sqrt{18}$ ಗೆ ಹೋಲಿಸುವುದು $\sqrt{19}-\sqrt{18}$ ಅನ್ನು $\sqrt{2}-\sqrt{1}$ ಗೆ ಹೋಲಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಮೇಲೆ ಕಾಣಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ

$$\sqrt{19}-\sqrt{18} = \frac{1}{\sqrt{19}+\sqrt{18}}, \quad \sqrt{2}-\sqrt{1} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. $\{1, 2\}$ ಮತ್ತು $\{18, 19\}$ ಗಳು ಸತತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಎಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. $\sqrt{2}+\sqrt{1}$ ಗಿಂತಲೂ $\sqrt{19}+\sqrt{18}$ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದುದರಿಂದ $\sqrt{19}-\sqrt{18} < \sqrt{2}-\sqrt{1}$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $\sqrt{1}+\sqrt{19} < \sqrt{2}+\sqrt{18}$ ಎಂಬುದೂ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ನಂತರ ನಾವು $\sqrt{2}+\sqrt{18}$ ಮತ್ತು $\sqrt{3}+\sqrt{17}$ ಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಕ್ರಮವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಿದಾಗ, $\sqrt{18}-\sqrt{17} < \sqrt{3}-\sqrt{2}$ ಎಂದೂ, ತತ್ಕಾರಣ $\sqrt{2}+\sqrt{18} < \sqrt{3}+\sqrt{17}$ ಎಂದೂ ತರ್ಕಿಸಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರೆದು

$$\sqrt{3}+\sqrt{17} < \sqrt{4}-\sqrt{16}$$
$$\sqrt{4}+\sqrt{16} < \sqrt{5}-\sqrt{15}$$
$$\sqrt{5}+\sqrt{15} < \sqrt{6}-\sqrt{14}$$

ಮುಂತಾಗಿ ತರ್ಕಿಸುತ್ತಾ, ಕಡೆಯಲ್ಲಿ

$$\sqrt{9}+\sqrt{11} < \sqrt{10}+\sqrt{10}$$

ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಪ್ರಮಾಣಗಳಾದ $\sqrt{1}+\sqrt{19}, \sqrt{2}+\sqrt{18}, \sqrt{3}+\sqrt{17}, \dots \sqrt{9}+\sqrt{11}$, $\sqrt{10}+\sqrt{10}$ ನಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣವು $\sqrt{10}+\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$ ಎಂದು ಸಾಬೀತಾಗುತ್ತದೆ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಬಗೆಹರಿಸಲೆಂದು ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

1. ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು?
    1. $3^{1/3}$ ಅಥವಾ $4^{1/4}$?
    2. $4^{1/4}$ ಅಥವಾ $5^{1/4}$?
2. ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು?
    1. $2^{1/3}$ ಅಥವಾ $3^{1/4}$?
    2. $3^{1/4}$ ಅಥವಾ $4^{1/5}$?
3. ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು? $1.1 + \frac{1}{1.1}$ ಅಥವಾ $1.01 + \frac{1}{1.01}$?
4. a ಮತ್ತು b ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, ಅವುಗಳ ಸ್ಥಿರ ಮೊತ್ತವು s ಆಗಿದ್ದರೆ, $a^2 + b^2$ ಗಳಿಸುವ ಕನಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯಗಳು ಯಾವುವು? ಉತ್ತರವನ್ನು sನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನೀಡಿರಿ.
5. a, b, c ಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ. ಯಾವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ? ಅಥವಾ $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ ಎಂಬುದು ಯಾವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಿಜವಾಗುತ್ತದೆ?



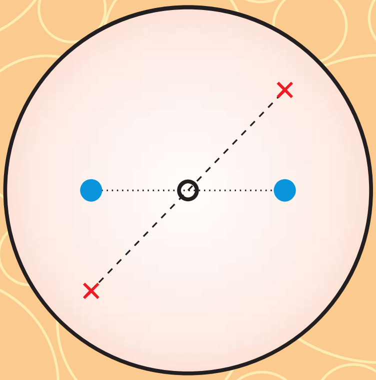
ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿಯವರು ಪುಣೆಯ ಸಹ್ಯಾದ್ರಿ ಶಾಲೆ (ಕೆಎಫ್ಐ) ನ ನಿರ್ದೇಶಕರು ಮತ್ತು ಪ್ರಾಂಶುಪಾಲರಾಗಿ ಮತ್ತು ರಿಷಿವ್ಯಾಲಿ ಸ್ಕೂಲ್ (ಆಂಧ್ರಪ್ರದೇಶ) ನ ಸಮುದಾಯ ಗಣಿತ ಕೇಂದ್ರದ ಮುಖ್ಯಸ್ಥರಾಗಿ ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಅವರು ಭಾರತದ ಮ್ಯಾಥ್ ಒಲಿಂಪಿಯಾಡ್ ಮೂಮೆಂಟ್ ನಲ್ಲಿ ಸಕ್ರಿಯವಾಗಿ ತೊಡಗಿಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಹಲವಾರು ಗಣಿತದ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆದಿರುವ ಇವರು *ಅಟ್ ರೈಟ್ ಆ್ಯಂಗಲ್ಸ್* ಪತ್ರಿಕೆಯ ಸಂಪಾದಕರಾಗಿ ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಅವರ ಸಂಪರ್ಕ ಕೊಂಡಿ: shailesh.shirali@gmail.com.

ಅನುವಾದ : ಎನ್. ರಾಮನಾಥ್

ವೃತ್ತವನ್ನು ತುಂಬಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರ

ಸಮಸ್ಯೆ ಪುಟ 10 ರಲ್ಲಿ

ರಾಹುಲ್: 'ಗೆಲುವಿನ ತಂತ್ರವು ವೃತ್ತದ ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಮಮಿತಿಯ ಮೇಲೆ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. ನಾನು ಮೊದಲು ಆಡಿದರೆ ನಾನು ಗೆಲ್ಲುವುದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಮತ್ತು ನಾನು ಮೊದಲು ಆಡಿದರೆ, ಆಗ ನಾನು ಮೊದಲ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಟೇಬಲ್‌ನ ಖಚಿತವಾದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಇರಿಸುತ್ತೇನೆ. ನಂತರ ನೀವು ಇಟ್ಟ ನಾಣ್ಯಗಳ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನೇ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸುತ್ತಾ ನನ್ನ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಇರಿಸತೊಡಗುತ್ತೇನೆ. ನಿಮಗೆ ಟೇಬಲ್ ಮೇಲೆ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಇಡಲು ಜಾಗವಿದ್ದರೆ ನನಗೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಟೇಬಲ್ ಮೇಲೆ ನಾಣ್ಯ ಇರಿಸಲು ಆಗದಂತಹ ಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ನೀವೇ ಮೊದಲು ತಲುಪುತ್ತೀರಿ.'



ನಿಜಕ್ಕೂ ಗೆಲ್ಲುವ ತಂತ್ರವೇ; ರಾಹುಲ್ ಒಬ್ಬ ಜಯಶಾಲಿ!

ಅನುವಾದ: ಎನ್. ರಾಮನಾಥ್